Nonlinear dynamics of parametrically driven solitary waves in a long channel

AUTHOR(S):

梅木, 誠

Nonlinear dynamics of parametrically driven solitary waves in a long channel

東大理　梅木　誠

液体の入った細長い長方形容器をモード (1,0)[短辺に1つ節のあるモード] の固有振動数のおよそ2倍で鉛直に加振したときにサブハーモニック励起される表面波の運動は次のパラメトリック散逸非線形 Schrödinger 方程式で記述される。

$$i(r_\tau + \alpha r) + Br_{XX} + (\beta + A|r|^2)r + A_0 r^* = 0. \tag{1}$$

ここで $r = p + iq$ は加振に対する in-phase (p) と out-phase(q) の振幅の複素表示、r^* は r の複素共役、τ と X はそれぞれ長いスケールの時間と長辺方向の座標、A, B は正の定数であり、加振の振幅、加振振動数 (2ω) の半分とモード (1,0) の固有振動数 (ω_1) のずれ、波の減衰率の無次元パラメータはそれぞれ

$$A_0 = a_0/a_1\epsilon^2,\ \ \beta = (\omega^2 - \omega_1^2)/(2\epsilon^2\omega^2),\ \ \alpha = a_{0min}/a_1\epsilon^2,$$

である。但し、$a_1 = (\kappa_1 \tanh \kappa_1 d)^{-1}$ 、κ_1 は波数、d は液体の深さ、ϵ は展開パラメータ、$a_0(a_{0min})$ は (最小) 励起加振振幅である。Wu, Keolian & Rudnick (1984) の実験によると, あるパラメータ (A_0, β) の範囲で X 方向に局在した安定な孤立波が励起される事が知られている。さらに、初期にある撹乱を加えて2個の孤立波をつくると、互いに近づき衝突してすり抜け互いに最初にあった位置を交換し、また近づき衝突するという一種の振動現象を繰り返し、その周期は加振周期に比べて約150倍である事が報告されている。一方、Miles(1984) は系 (1) の定常解として sech 型の解及び周期境界条件の下でのクノイダル型の解を導いた。また差分法を用いた数値解析によって (1) の spatiotemporal chaos が Ezerskiǐ et.al(1986) により示されている。

本研究では周期境界条件の下で系 (1) の解の分類を解析的に調べ、数値シミュレーションを行った。以下に新しく分かった結果を簡単に示す。

1) 定常解として静止解、一様解、孤立波解が存在し、孤立波解には位相 θ $(r = |r|\exp i\theta)$ が空間的に一様であるものとしてクノイダル波と dn 型の解があり、さらに位相が一様でない解も存在する。

2) クノイダル波と dn 型の解はそれぞれ静止解と一様解からの pitchfork 分岐であり、β, 即ち加振振動数により supercritical または subcritical に分類される。それぞれの解の存在範囲と、静止解、一様解の安定性を示した。

3) 擬スペクトル法による数値計算で、初期値をクノイダル波の近くにとり加振振幅 (A_0) 以外のパラメータを固定し時間発展を調べた結果、ある臨界加振振幅を越えるとクノイダル波が不安定になり、Hopf 分岐を通して振動解に変わる。この振動解は実空間で見ると孤立波のすり抜け、衝突現象である (図1)。さらに A_0 を大きくすると空間構造が複雑になり、時間的にも不規則になる。複雑な空間構造の場合には低波数側に波数に依らない一定のスペクトルが現れた。

3) の結果は Wu et.al の実験事実を定性的に説明するものであり、系 (2) のモデルの信頼性を高めるものと考えられる。ファラデー共鳴の場合と同様なモード競合のメカニズムが孤立波の振動現象に現れているものと予想される。

<参考文献>

Wu, J., Keolian, R. & Rudnick, I. 1984 Phys. Rev. Lett. **52**, 1421-1424.

Miles, J. W. 1984 J. Fluid Mech. **148**, 451-460.

Ezerskiǐ, A. B., Rabinovich, M. I., Reutov, V. P., & Starobinets, I. M. 1986 Sov. Phys. JETP **64** (6), 1228-1236.

Umeki. M. 1990 in preparation.

図 1(下). 系 (1) の in-phase (p) の時間発展。パラメータは $(\alpha, \beta, A_0) = (0.2, -0.3, 0.525)$ である。